La matematica e i suoi modelli

Un esempio tratto dalla vita quotidiana

Scheda **2**

1. Quanto costa un viaggio in treno?

Come avrete capito, le vacanze dei signori Van Per Tren sono un pretesto per proporvi alcuni esercizi con cui riprendere confidenza con le nozioni di matematica che avete studiato nella scuola media inferiore e introdurre il lavoro che svolgeremo quest'anno. Nella realtà chi intraprende un viaggio si pone qualche problema in meno dei nostri amici. Comunque andiamo avanti nella nostra finzione.

I Van Per Tren, che cercano di amministrare nel miglior modo possibile i soldi che hanno deciso di spendere per le vacanze, oltre al problema del tempo impiegato dai vari treni, si pongono anche quello del costo del viaggio. Cercano nell'orario ufficiale i prezzi, ma non li trovano e non trovano neanche un modo per calcolarli sulla base della distanza chilometrica. Allora cercano su Internet, nel sito delle Ferrovie dello Stato, le tariffe di alcune corse, per i tipi di categoria intermedia (che nella scheda 1 abbiamo chiamato B), e cercano di capire come si formano i prezzi. Ecco i dati che recuperano, per alcune corse (i prezzi sono in euro, relativi all'anno in cui i Van Per Tren stanno facendo le vacanze, e sono relativi ai viaggi in 2ª classe):

(1.1)

km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa
28	6	**46**	7	**90**	9	**144**	13.50	**165**	16
313	24.70	**501**	38.50	**769**	52.50	**1023**	72.50		

Per organizzarsi i prossimi viaggi nel modo più conveniente, i nostri meticolosi amici cercano di capire meglio come variano le tariffe. La signora Van Per Tren, che per mestiere fa l'insegnante di matematica, esaminando la tabella riesce a capire l'andamento delle tariffe. Noi cercheremo di aiutarci con un grafico su carta quadrettata del prezzo del biglietto al variare della percorrenza (→ *figura 1*; clicca l'immagine per ingrandirla).

figura 1

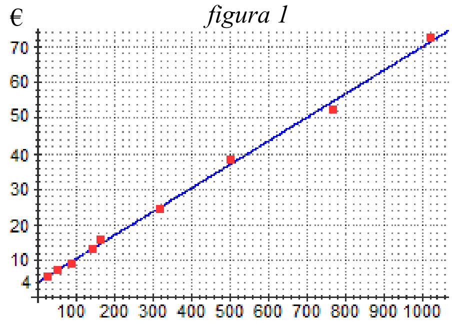
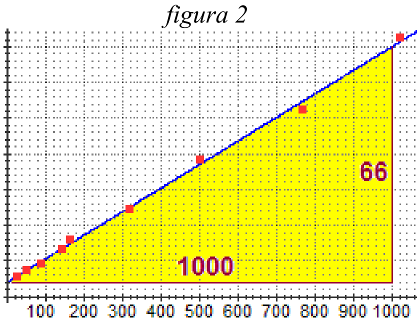


figura 2



percorrenza (in km)

Come si vede i punti che rappresentano la tabella si dispongono approssimativamente lungo una retta che parte dal punto di *ascissa* 0 e di *ordinata* 4 e arriva nel punto di ascissa 1000 e ordinata 70, come si può vedere meglio nella → *figura 2*.

Le → *figure 3* e *4* richiamano il significato della ***proporzionalità***. Supponiamo che le tariffe crescano esattamente come rappresentato dal grafico rettilineo rappresentato in figura 3: ogni 200 km in più la tariffa aumenta di 13.20 € (infatti 200 è 1000/5 e 66/5 = 13.20).
Generalizzando consideriamo la figura 4: muovendo lungo la retta *r* il vertice *P* del rettangolo tratteggiato, questo viene ingrandito (se *P* viene allontanato da *Q*) o rimpicciolito (se *P* viene avvicinato a *Q*) mantenendo la stessa forma: le dimensioni, base e altezza, *variano in proporzione*, cioè vengono moltiplicate per uno stesso numero.

In altre parole il *rapporto* base/altezza è *costante*: se la base è *tot* volte l'altezza, in tutte le riproduzioni proporzionate la base continua a essere *tot* volte l'altezza. Invece il rettangolo ottenuto spostando il vertice *P* nel punto *S* non appartenente a *r* è un ingrandimento *sproporzionato* del rettangolo tratteggiato: la base è stata ingrandita maggiormente dell'altezza.

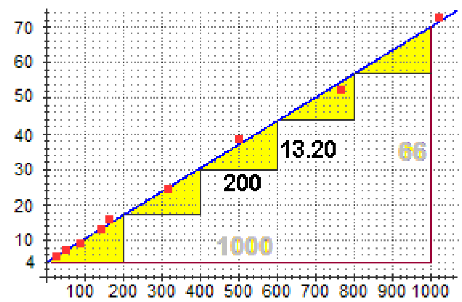


figura 3

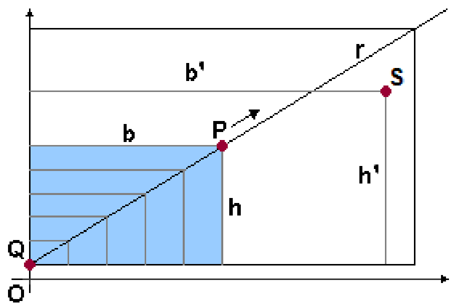


figura 4

Dunque, ogni chilometro la tariffa aumenta di circa 66/1000 = 0.066 €. Questo (0.066 €/km) è il rapporto approssimativo tra l'aumento del prezzo e l'aumento della percorrenza.
In conclusione possiamo dire che, grosso modo, le tariffe crescono "regolarmente" all'aumentare della lunghezza del percorso e che il prezzo, euro più, euro meno, è dato dalla *formula*:

(1.2) PREZZO (in €) = 4 + (n° di CHILOMETRI PERCORSI) · 0.066

Il punto a mezza altezza "·" è un simbolo per indicare la moltiplicazione. Lo useremo spesso in alternativa al simbolo "×". Una formula che, come questa, abbia la forma "…=…", cioè sia costituita da due *termini* separati dal simbolo di *eguaglianza*, viene detta anche *equazione*.

La formula (1.2) rappresenta le tariffe ferroviarie in forma assai concisa. Tuttavia non le rappresenta esattamente, ma in modo approssimato. Consultare Internet o altre fonti di informazione delle Ferrovie è indispensabile se si vuole conoscere esattamente il costo di un viaggio; il ***modello*** "formula" ha invece il vantaggio di essere facilmente memorizzabile e di essere così impiegabile quando non si hanno a disposizione altre fonti di informazione.

1 Calcolate i prezzi per 144 e 501 km impiegando (1.2) e confrontateli con quelli ricavati da Internet.

144 km ______ 501 km ______

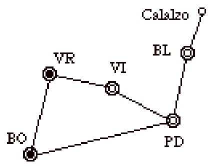
Abbiamo introdotto la ***formula*** (1.2) e il ***grafico*** di fig. 1 come rappresentazioni semplificate della ***tabella*** (1.1). In realtà l'aspetto più importante è che esse ci consentono di *comprendere il ragionamento seguito da chi ha predisposto la tabella delle tariffe*: chi amministra le Ferrovie ha voluto fissare il prezzo in modo che fosse formato da una quota fissa e da una parte più o meno proporzionale alla lunghezza del tragitto percorso.

2. Quale tipo di biglietto conviene?

Consultando Internet trovano che, nel periodo in cui vogliono venire in Italia, sono in vigore alcune tariffe agevolate. In particolare soffermano l'attenzione su un particolare *biglietto chilometrico*: costa 42 € e può essere impiegato per fare più viaggi, fino a una percorrenza complessiva di 500 km. Usando la formula che stima i prezzi dei biglietti, come possono affrontare quesiti come i seguenti?

2 (A) Se devo fare un viaggio di 500 km mi conviene fare un biglietto normale o un biglietto chilometrico?

(B) E se devo fare un viaggio di 200, due di 100 ed uno di 90 km?



3. La Freccia delle Dolomiti

I nostri amici olandesi osservano che da Padova si possono raggiungere in treno le Dolomiti, arrivando fino a Calalzo di Cadore, posto all'inizio della Valle d'Ampezzo, vicino al Lago di Cadore. Pensano, quindi, di raggiungere Vicenza facendo scalo non a Verona ma a Padova, in modo da poter fare una puntata di un giorno nelle Dolomiti.

Su una guida trovano indicato un treno che viene indicato come *Freccia delle Dolomiti*. Stimolati dal nome, che suggerisce alte velocità, pensano di impiegarlo per raggiungere Calalzo.

Nella tabella (3.1) sono state riportate dall'orario le ore in cui il treno sosta nelle varie stazioni. Per le stazioni in cui la sosta è più lunga è indicata sia l'ora di arrivo che quella di partenza.

km		↓
0	**Padova**	1530
11	Campodarsego	1540
15	S.Giorgio	1546
19	**Camposampiero**	1550
31	**Castelfranco**	1602
		1622
48	**Montebelluna**	1636
56	Cornuda	1646
66	Fener	1657
83	Feltre	1715
101	Bribano	1733
114	**Belluno**	1747
121	Polpet	1755
132	Longarone	1808
158	**Calalzo**	1855

(3.1)

Stimiamo la *velocità media* con cui è percorso il tratto Padova-Calalzo.

– 15:30 $\xrightarrow{+3}$ 18:30 $\xrightarrow{+0:25}$ 18:55: il tempo impiegato è 3 *h* e 25 *min*;

– la distanza è 158 *km*;

– il tempo è 3 *h* e rotti, la distanza è 150 *km* e rotti, 150=50·3, quindi il treno in 1 *h* fa mediamente circa 50 *km*.

Controlliamo questa stima con la calcolatrice.

3 Calcolate la *velocità media* con cui il treno percorre il tratto Padova-Calalzo.

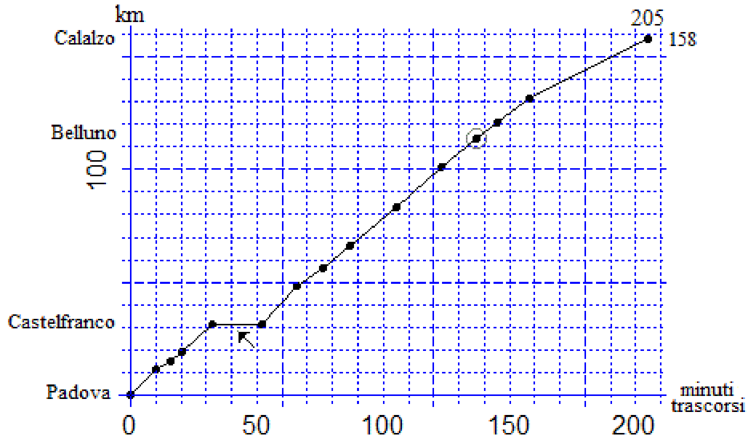
distanza (Padova-Calalzo) = ______ km   tempo (Padova-Calalzo) = ______ min

velocità (Padova-Calalzo) = distanza/tempo = ______ km/h

Nota: 1 h = 60 min; quindi per passare da una velocità in km/min al suo valore in km/h occorre moltiplicare per 60.

Velocità intorno ai 50 km/h non sono certo da "freccia": sono di poco superiori alle velocità che riesce a tenere un ciclomotore. La signora Van Per Tren, per valutare se la bassa velocità media può dipendere dalla lunghezza delle soste nelle stazioni e dal fatto che vi sono molte fermate (le quali, in ogni caso, rallentano la marcia) decide di rappresentare su carta quadrettata il ***moto del treno*** (vedi *figura 5*).

figura 5



I pallini neri rappresentano la posizione del treno lungo la linea ferroviaria al trascorrere del tempo, ad esempio quello evidenziato col cerchietto rappresenta il fatto che, secondo la tabella, alle 17:46, dopo 136 minuti dalla partenza, il treno è alla stazione di Belluno.

I pezzi di grafico orizzontali rappresentano le soste nelle stazioni. Ad esempio durante il tragitto Padova-Calalzo il treno sosta a Castelfranco tra le 16:02 e le 16:22, cioè per 20 minuti, dal 32° al 52° minuto dalla partenza; ciò è rappresentato dal tratto orizzontale (indicato dalla freccia) tracciato in corrispondenza di Castelfranco.

I Van Per Tren osservano che dove vi sono molte fermate il grafico non ha pendenza inferiore. Ciò fa svanire l'ipotesi che la lentezza del treno sia dovuta soprattutto alle molte fermate. Ma viene un'altra idea: la causa principale può essere la natura del percorso: è una linea ferroviaria che dalla pianura va in montagna; quindi avrà da superare tratti in salita e, presumibilmente, tratti con numerose curve; se le locomotrici non sono molto efficienti e la strada ferrata non è in buono stato difficilmente si possono tenere alte velocità.

4 Dal grafico di fig. 5, esaminando le pendenze, individuate il tratto tra due fermate successive in cui il treno è più lento e quello in cui è più veloce. Quindi usando la tabella (3.1) calcolate la velocità media del treno in tali tratti.

tratto più lento .... velocità ....

tratto più veloce .... velocità ....

Il tratto in cui il treno viaggia più lentamente è anche il più lungo, e quindi quello in cui la velocità media risente meno delle fasi di partenza e arrivo in stazione. Ciò sembra confermare l'idea dei Van Per Tren che la lentezza del treno dipenda dalla natura del percorso. Consideriamo il ***profilo altimetrico*** della linea Padova-Calalzo, in modo da vedere se il tratto in questione affronta effettivamente una zona particolarmente montuosa.

In *figura 6* il profilo è stato rappresentato impiegando la stessa scala per la distanza da Padova lungo la linea ferroviaria (asse orizzontale) e per la altitudine (asse verticale): 10 km sono stati rappresentati con segmenti di eguale lunghezza sui due assi.

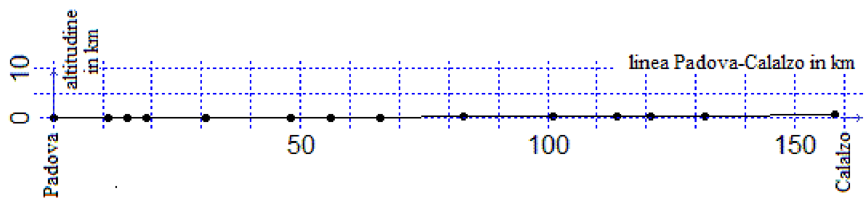


figura 6

Per esaminare meglio come varia la pendenza della linea ferroviaria *dilatiamo* il grafico verticalmente. Otteniamo (vedi *figura 7*) un *modello* meno fedele ma che ci consente di distinguere meglio i tratti con diversa pendenza. In particolare viene evidenziato come l'ultimo tratto della linea (Longarone-Calalzo) sia quello con la maggiore pendenza.

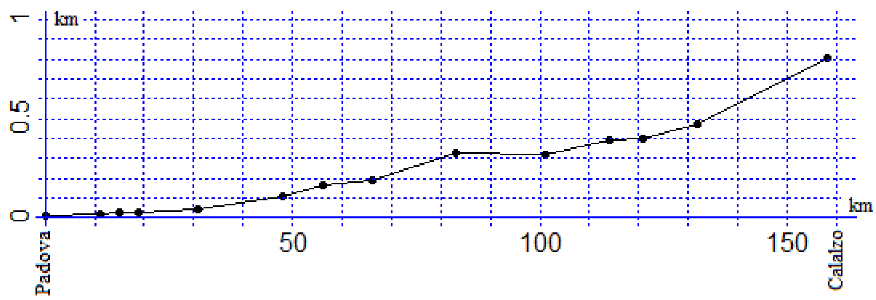


figura 7

Come si può esprimere in forma più precisa il concetto di ***pendenza***? Indicando di quanti metri (o centimetri, millimetri, …) si innalza la strada ogni 100 metri (o centimetri, millimetri, …) di avanzamento in orizzontale.

Ad esempio il cartello stradale riprodotto in *figura 8*, a sinistra, segnala una discesa pericolosa con pendenza del 8% (8 *per cento*): la strada è inclinata come il triangolo disegnato a destra, che ha la base lunga 100 unità di misura e è alto 8 unità di misura. In altre parole il *rapporto* tra spostamento verticale e spostamento orizzontale è lo stesso che intercorre tra 8 e 100: 8/100 = 0.08 = 8 centesimi.

Se percorro un tratto di discesa che corrisponde ad uno spostamento orizzontale di 25 metri mi abbasso di 8 centesimi di 25 metri, cioè di 25·0.08 = 2 metri.

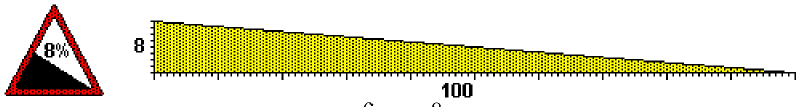


figura 8

Si noti che nel caso delle pendenze stradali, che possono arrivare a valori di poco superiori al 10%, non c'è grande differenza tra lunghezza della strada percorsa e avanzamento orizzontale. Ad esempio nel caso sopra raffigurato la base del triangolo e il lato obliquo hanno lunghezza pressoché eguale. In particolare, nel caso della nostra linea ferroviaria, che come abbiamo visto (vedi figura 6) è assai meno inclinata del triangolo raffigurato, possiamo considerare praticamente eguali l'avanzamento in orizzontale e la lunghezza della strada ferrata percorsa.

5 Dalla figura 7 si vede che il dislivello tra Longarone e Calalzo e poco più di 300 metri. La distanza tra Longarone e Calalzo è circa 25 km, cioè circa 25000 m. Qual è, approssimativamente, la pendenza di questo tratto di linea ferroviaria?

rapporto tra dislivello e distanza = 300/25000 = 0.012 = ... centesimi = ...%

4. Esercizi

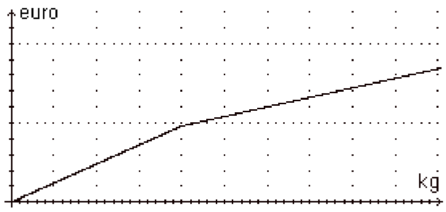
In questa seconda scheda abbiamo richiamato altri tipi di ***modelli matematici***: tabelle e equazioni per esprimere il legame tra due grandezze (nel nostro caso tra percorrenza e prezzo) e loro rappresentazioni grafiche, i concetti di rapporto e di proporzionalità, il concetto di pendenza, …

Abbiamo visto anche in questa scheda che l'impiego di modelli matematici opportuni, per quanto spesso dia luogo a rappresentazioni semplificate delle situazioni, può *facilitare* le *decisioni*, la *comunicazione*, la *comprensione dei fenomeni*, …

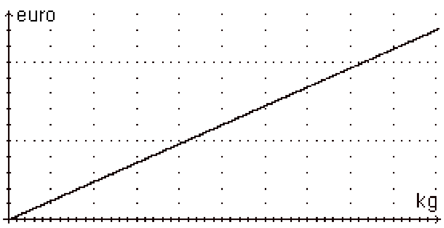
Negli *esercizi* che seguono vi vengono proposte alcune attività relative agli esempi e agli strumenti matematici considerati nella scheda.

e1 Scrivi su un foglio le frasi con cui spiegheresti per telefono come calcolare approssimativamente il prezzo del viaggio Belluno-Calalzo in un treno di categoria B a una persona che abbia sottomano un orario ferroviario simile a quello dei Van Per Tren (indice grafico in prima pagina, quadri orari nelle pagine successive). Supponi che la persona non abbia pratica di orari ferroviari e che tu non abbia sottomano un orario ferroviario e una calcolatrice per dirgli direttamente il prezzo. Ricorda che devi spiegare alla persona sia come calcolare il chilometraggio che come da questo risalire al prezzo del biglietto.

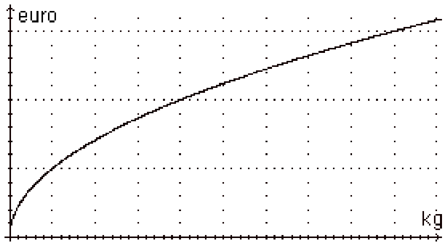
e2 Quale tra i tre grafici a lato potrebbe rappresentare quanto si deve pagare in un negozio per l'acquisto di una certa quantità di patate? Perché hai escluso gli altri due grafici?



A

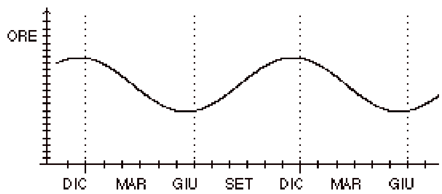


B

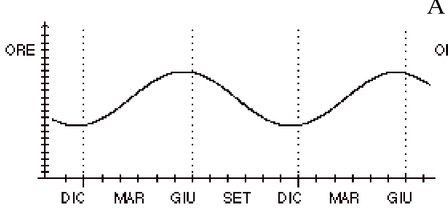


C

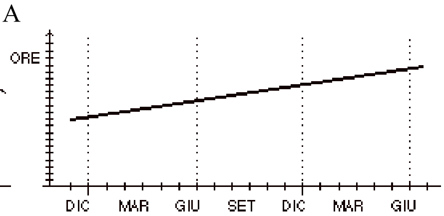
e3 Quale tra i tre grafici a lato potrebbe rappresentare le ore di sole tra il novembre 2008 e l'agosto 2010? Perché hai escluso gli altri due grafici?



A

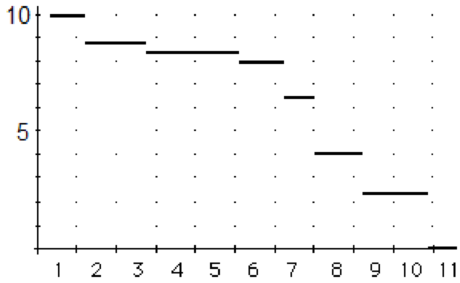


B

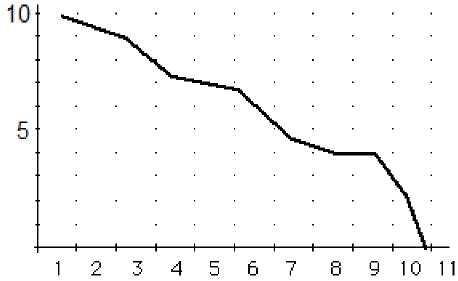


C

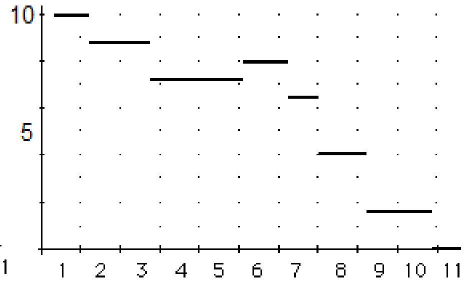
e4 A Mario si è rotto il cellulare e, in attesa di mettere insieme i soldi per comprarsene un altro, acquista una scheda telefonica da 10 € e la esaurisce con varie telefonate in una decina di giorni. Quale dei tre grafici seguenti potrebbe rappresentare il valore della scheda telefonica di Mario dal momento dell'acquisto a quello del suo esaurimento? Perché hai escluso gli altri due grafici?



A



B



C

e5 Provate a calcolare *mentalmente* (come fareste in una situazione normale, senza ricorrere a meccanismi di calcolo scolastici) il tempo (in min) che trascorre tra le seguenti coppie di ore e descrivete su un foglio il ragionamento che avete impiegato per ciascuna di esse.

(a) dalle 18:11 alle 21:20, (b) dalle 13:26 alle 15:24, (c) dalle 10:57 alle 16:29,
(d) dalle 7:38 alle 9:06.

e6 Indichiamo con m i minuti trascorsi tra l'ora $h1{:}m1$ e l'ora $h2{:}m2$ dello stesso giorno (ad esempio nel caso (a) del quesito e5 $h1$ è 18, $m1$ è 11, $h2$ è 21 e $m2$ è 20 mentre m, se hai fatto i calcoli giusti, è 189). Si vuole preparare un programma per calcolare m mediante un calcolatore. Quale o quali tra le seguenti formule è corretto impiegare? (in aiuto o a conferma delle tue conclusioni *fai* una verifica con i dati del quesito 10) Prova a spiegare gli errori commessi nella o nelle formule scorrette.

(1) $m = (h2\cdot 60 + m2) - (h1\cdot 60 + m1)$ (2) $m = (h2 - h1)\cdot 60 + (m2 - m1)$

(3) $m = h2\cdot 60 + m2 - h1\cdot 60 + m1$ (4) $m = (h2 - h1)\cdot 60 + m2 - m1$